PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

ZADACI SA REŠENJIMA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE, JUN 2011

---

1. Uprostiti izraz

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2, \quad a,b>0, \quad a\neq b.$$

Rešenje: Transformacijom izraza dobijamo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 &= \\
&= \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}\right)^2 \\
&= \frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)^2 \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \\
&= \frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
&= \frac{a-b}{a-b} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Izračunati

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{300}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{600}.$$

Rešenje: Kako je $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$ i $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i$, sledi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{300}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{600} &= \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{150}+\left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{300} \\
&= i^{150}+(-i)^{300} \\
&= i^{4\cdot 37+2}+i^{4\cdot 75} \\
&= (i^4)^{37}\cdot i^2+(i^4)^{75} \\
&= 1\cdot(-1)+1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Odrediti vrednosti parametra m za koje rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2+(2m+2)\,x+m=0$ zadovoljavaju uslov

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>8.$$

Rešenje: Na osnovu Vietovih pravila je

$$x_1+x_2=-(2m+2) \quad \text{i} \quad x_1\cdot x_2=m,$$

te je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} &= \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}\\
&= \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}\\
&= \frac{(2m+2)^2-2m}{m^2}=\frac{4m^2+8m+4-2m}{m^2}\\
&= \frac{4m^2+6m+4}{m^2}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>8 &\iff \frac{4m^2+6m+4}{m^2}>8\\
&\iff \frac{4m^2+6m+4}{m^2}-8>0\\
&\iff \frac{4m^2+6m+4-8m^2}{m^2}>0\\
&\iff \frac{-2(2m^2-3m-2)}{m^2}>0\\
&\iff 2m^2-3m-2<0 \ \wedge \ m\neq 0.
\end{aligned}$$

Kako jednačina $2m^2-3m-2=0$ ima rešenja $m_1=-\frac{1}{2}$ i $m_2=2$, nejednačina $2m^2-3m-2<0$ je zadovoljena ako i samo ako je $m\in(-\frac{1}{2},2)$. Prema tome,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>8 &\iff m\in(-\frac{1}{2},2)\wedge\ m\neq 0\\
&\iff m\in(-\frac{1}{2},0)\cup(0,2).
\end{aligned}$$

4. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}.$$

Rešenje: Data jednačina ima smisla ako je

$$4x-3\geq 0 \ \wedge \ 2x-1\geq 0 \ \wedge \ x-1\geq 0 \iff x\geq 1.$$

Stoga,

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x-3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \quad &\iff \quad 4x-3 = 2x-1+2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1}+x-1 \ \land \ x \geq 1 \\
&\iff \quad x-1 = 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} \ \land \ x \geq 1 \\
&\iff \quad (x-1)^2 = 4(2x-1)(x-1) \ \land \ x \geq 1 \\
&\iff \quad 7x^2-10x+3 = 0 \ \land \ x \geq 1 \\
&\iff \quad (x = \frac{3}{7} \lor x = 1) \ \land \ x \geq 1 \\
&\iff \quad x = 1.
\end{aligned}$$

5. Rešiti jednačinu

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} \quad &\iff \quad 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 9^x = 6 \cdot 4 \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9^x \\
&\iff \quad (27 + \frac{9}{2})9^x = 21 \cdot 4^x \\
&\iff \quad \frac{63}{2}9^x = 21 \cdot 4^x \\
&\iff \quad \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{42}{63} \\
&\iff \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \\
&\iff \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \\
&\iff \quad 2x = -1 \\
&\iff \quad x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6. Rešiti nejednačinu

$$\log_3(1-x) < \log_{1/3}(x+2).$$

Rešenje: Data nejednačina je definisana za

$$1-x > 0 \ \land \ x+2 > 0 \iff -2 < x < 1.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}
\log_3(1-x) < \log_{1/3}(x+2) &\iff \log_3(1-x) < \log_{3^{-1}}(x+2) \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \log_3(1-x) < -\log_3(x+2) \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \log_3(1-x) < \log_3(x+2)^{-1} \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff 1-x < \frac{1}{x+2} \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff (1-x)(x+2) < 1 \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff -x^2 - x + 1 < 0 \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \left(x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \lor\ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff -2 < x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \lor\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1.
\end{aligned}$$

Primetimo da je moguće zaključivati i na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\log_3(1-x) < \log_{1/3}(x+2) &\iff \log_3(1-x) < \log_{3^{-1}}(x+2) \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \log_3(1-x) < -\log_3(x+2) \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \log_3(1-x) + \log_3(x+2) < 0 \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff \log_3(1-x)(x+2) < \log_3 1 \ \land\ -2 < x < 1 \\
&\iff (1-x)(x+2) < 1 \ \land\ -2 < x < 1.
\end{aligned}$$

7. Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{1}{2} \\
&\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\
&\iff x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \lor\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z \\
&\iff x = 2k\pi \ \lor\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z.
\end{aligned}$$

8. Kroz tačku $A(2, -\frac{1}{2})$ unutar kruga $(x-1)^2 + y^2 = 4$ konstruisana je tetiva čije je središte tačka A. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tu tetivu.

Rešenje: Centar kruga je $C(1,0)$, pa je jednačina prave l kroz tačke A i C

$$l : y - y_C = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C}(x - x_C), \quad \text{tj.} \quad l : y - 0 = \frac{-\frac{1}{2} - 0}{2-1}(x-1),$$

odnosno $l : y = -\frac{1}{2}(x-1)$. Prava p koja sadrži datu tetivu prolazi kroz tačku A i upravna je na pravu l, pa je njen koeficijent pravca

$$k_p = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2.$$

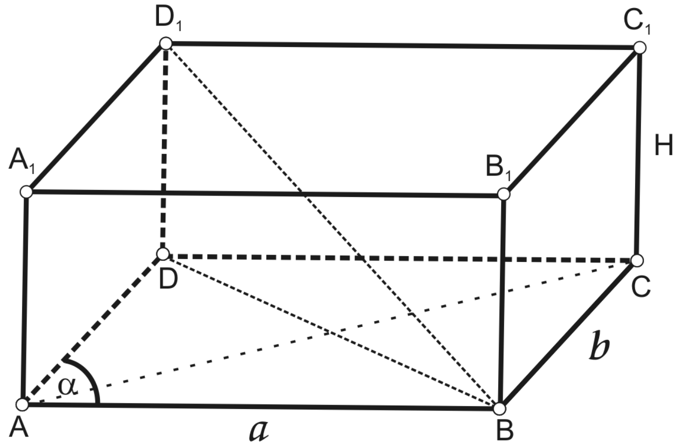
Stoga je jednačina prave p

$$p : y - y_A = k_p(x - x_A), \quad \text{tj.} \quad p : y + \frac{1}{2} = 2(x-2).$$

Dakle, $p : 4x - 2y - 9 = 0$.

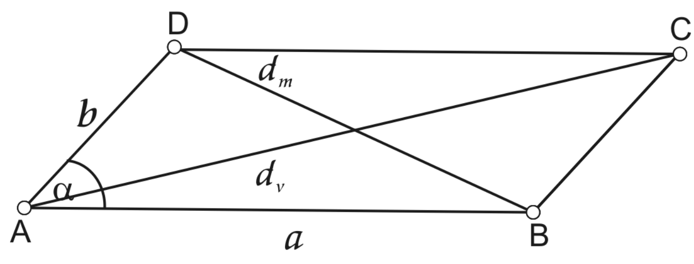
9. Osnova pravog paralelopipeda je paralelogram sa stranicama a i b i oštrim uglom α. Manja dijagonala paralelopipeda jednaka je većoj dijagonali osnove. Izračunati zapreminu paralelopipeda.

Rešenje: (*I način.*) Neka je dat prav paralelopiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kao na Slici 1.



Slika 1.

Osnova paralelopipeda je paralelogram $ABCD$, sa stranicama a, b i oštrim uglom α (Slika 2).



Slika 2.

Neka je sa d_m označena manja, a sa d_v veća dijagonala paralelograma $ABCD$. Primenom kosinusne teoreme na trougao ABD, dobijamo:

$$d_m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao ABC, dobijamo:

$$d_v^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^o - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Kako je još dato u zadatku da je $|D_1B| = |AC| = d_v$ (Slika 1), iz pravouglog trougla BDD_1, imamo $H^2 = |D_1B|^2 - d_m^2$, tj.

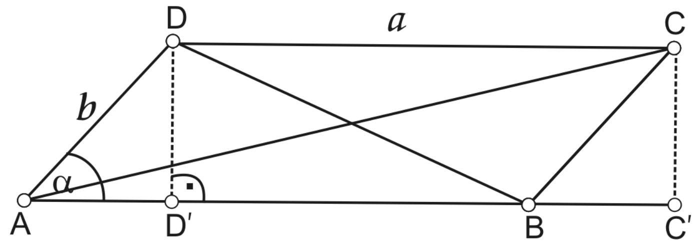
$$H^2 = d_v^2 - d_m^2 = 4ab\cos\alpha.$$

Površina paralelograma $ABCD$ je $P = ab\sin\alpha$, tako da je sada zapremina paralelopipeda

$$V = BH = ab\sin\alpha\sqrt{4ab\cos\alpha} = 2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}.$$

(*II način.*) Neka je dat prav paralelopiped $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kao na Slici 1. Osnova paralelopipeda je paralelogram $ABCD$, sa stranicama a, b i oštrim uglom α (Slika 3). Konstruišimo iz temena D visinu paralelograma $h_a = |DD'| = |CC'|$. Iz pravouglog trougla ADD', dobijamo da je

$$|AD'| = |AD|\cos\alpha = b\cos\alpha,\ h_a = |AD|\sin\alpha = b\sin\alpha.$$



Slika 3.

Sada je $|BD'| = a - b\cos\alpha$, $|AC'| = a + b\cos\alpha$. Iz pravouglog trougla BDD' primenom Pitagorine teoreme dobija se $|BD|^2 = |BD'|^2 + |DD'|^2$, tj.

$$d_m^2 = (a - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 = a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2. \tag{1}$$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ACC', dobija se $|AC|^2 = |AC'|^2 + |CC'|^2$, tj.

$$d_v^2 = (a + b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 = a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2. \tag{2}$$

Kako je još dato u zadatku da je $|D_1B| = |AC| = d_v$ (Slika 1), iz pravouglog trougla BDD_1, imamo $H^2 = |D_1B|^2 - d_m^2$. Na osnovu jednačina (1) i (2) dobija se visina paralelopipeda

$$H^2 = d_v^2 - d_m^2 = 4ab\cos\alpha.$$

Zapremina paralelopipeda je sada

$$V = BH = ah_aH = ab\sin\alpha\sqrt{4ab\cos\alpha} = 2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}.$$

10. Ako je zbir tri uzastopna člana nekog rastućeg aritmetičkog niza 3, a zbir njihovih kubova 4, odrediti te članove.

Rešenje: Označimo ta tri uzastopna člana aritmetičkog niza sa $x - d$, x, $x + d$. Iz uslova da je njihov zbir 3, a zbir njihovih kubova 4 dobijamo

$$(x - d) + x + (x + d) = 3$$

i

$$(x-d)^3 + x^3 + (x+d)^3 = 4.$$

Sledi $x = 1$ i

$$\begin{aligned}
(1-d)^3 + 1^3 + (1+d)^3 = 4 &\iff 1 - 3d + 3d^2 - d^3 + 1 + 1 + 3d + 3d^2 + d^3 = 4 \\
&\iff 6d^2 = 1 \\
&\iff d = \frac{1}{\sqrt{6}} \ \vee \ d = -\frac{1}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Kako se radi o rastućem aritmetičkom nizu, to je $d > 0$ i zaključujemo da je $d = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Prema tome, traženi članovi niza su

$$1 - \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad 1, \quad 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}.$$